Рекуррентные (разностные) уравнения в решении задач естествознания

Кулаков Матвей Павлович

ИКАРП ДВО РАН

г. Биробиджан

- **Прогрессия** (арифметическая и геометрическая)
- **Уравнение** (линейное, квадратное)
- **Функция** (линейная, квадратичная, гипербола)

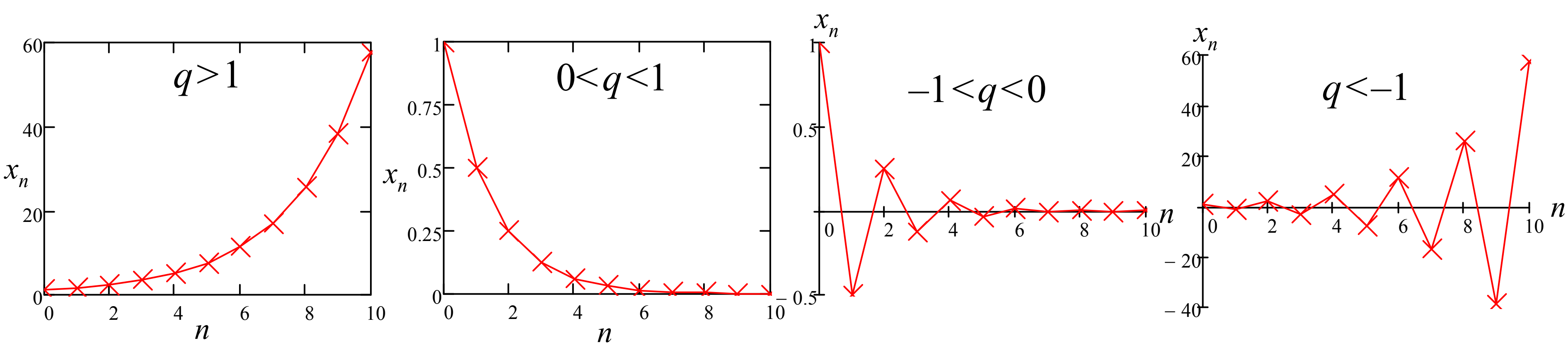
1. Задача о росте числа микроорганизмов или задаче о росте населении Земли

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ – геометрическая прогрессия во знаменателем q

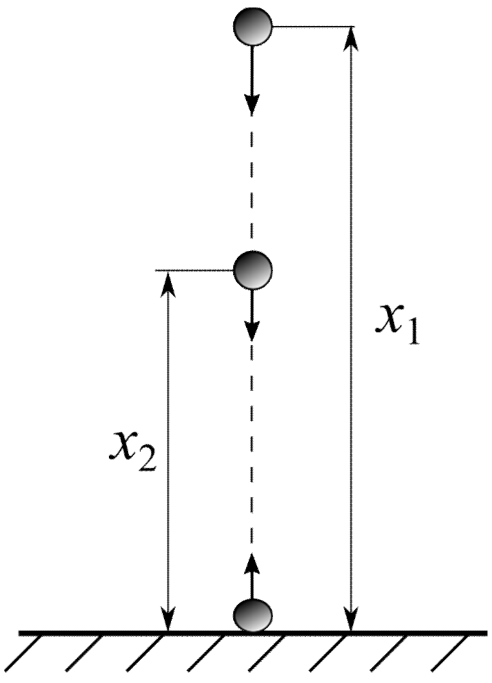
$x_{n+1} = qx_n$ ⇐ модель **Мальтуса** или дискетный аналог **закона экспоненциального роста**

$x_n = q^n x_1$ ⇐ решение (значение любого члена последовательности)

$$x_2 = qx_1,\ \ x_3 = qx_2,\ \ x_4 = qx_3,\ \ldots,\ \ x_{n+1} = qx_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

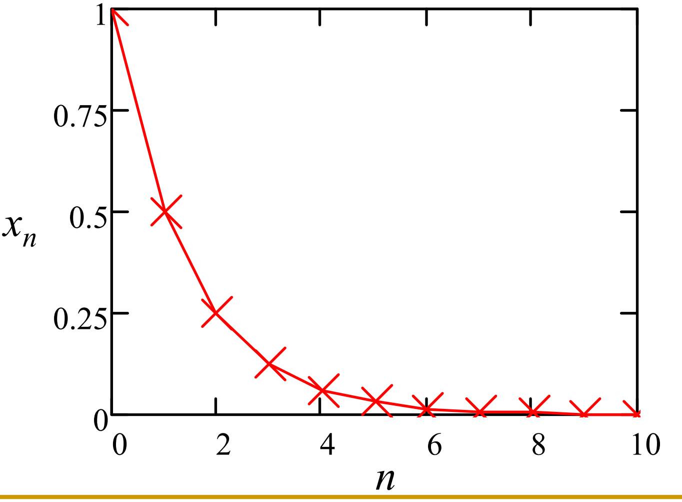


1.1 Задача о прыгающем шарике



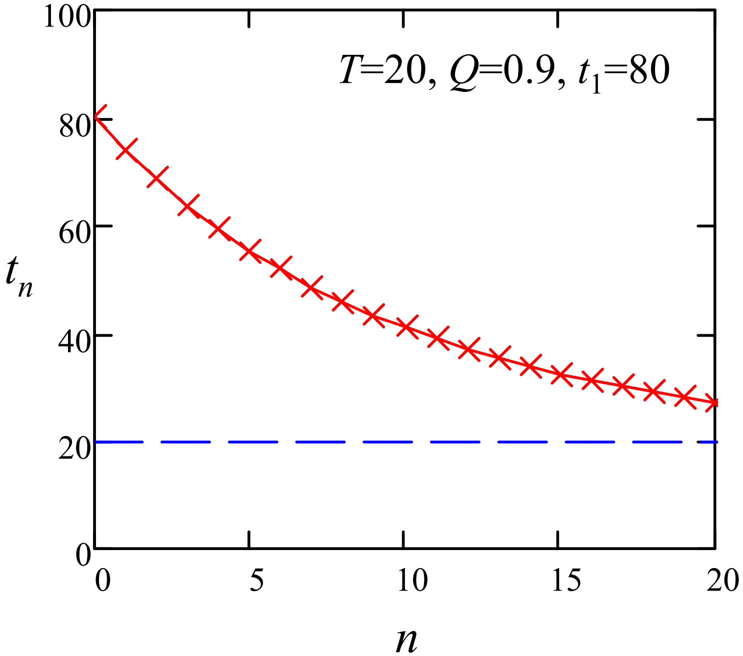
Шарик падает с некоторой высоты x_1
на горизонтальную поверхность. При каждом ударе о поверхность шарик теряет долю скорости ε.
Требуется определить высоту каждого отскока шарика, а также время, через которое он остановиться.

$$x_{n+1} = (1-\varepsilon)x_n \text{, где} \quad 0 < \varepsilon < 1$$



1.2 Задача об охлаждении горящих тел

$t_{n+1} = Q(t_n - T) + T$, где t_n и T – температура тела и среды, $0<Q<1$ – скорость охлаждения тела



Q – ?

Измеряем T, а также t_1 и t_2 через некоторый промежуток времени

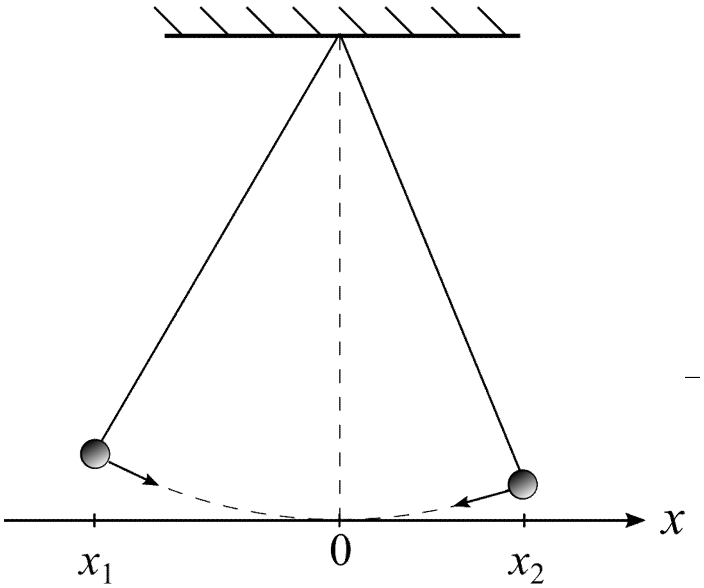
Решаем уравнение:

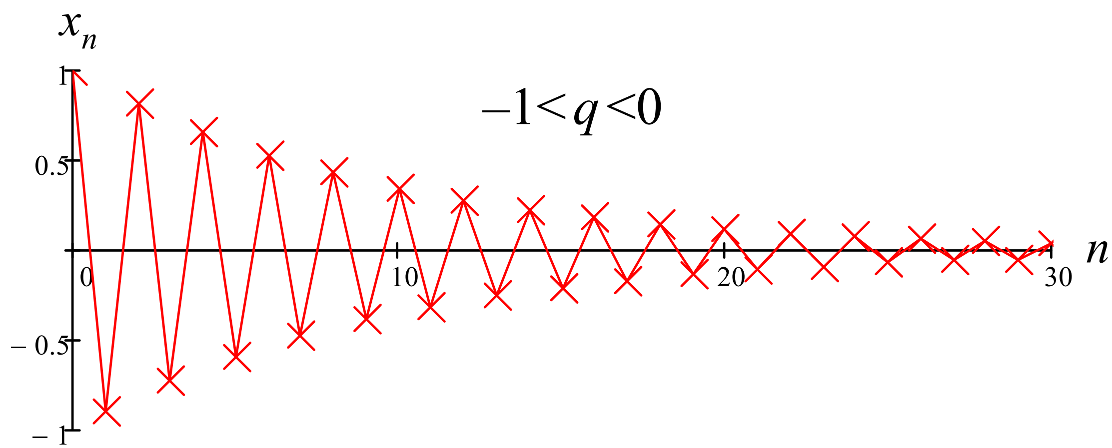
$t_2 = Q(t_1 - T) + T$

1.3 Математический маятник и затухающие колебания

$x_{n+1} = q x_n$, где $q = -e^{-\pi\gamma/\omega}$

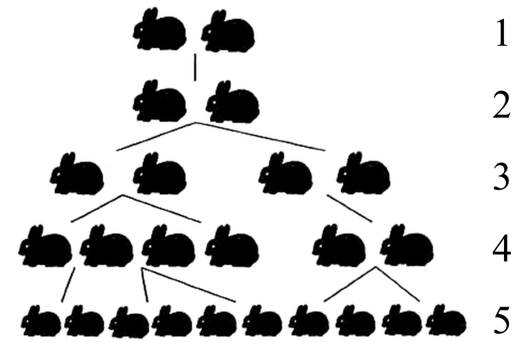
ω – частота колебаний,
γ – коэффициент трения





2. Задача о «кроликах Фибоначчи»

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\,,\ \text{при}\ x_1=x_2=1$$

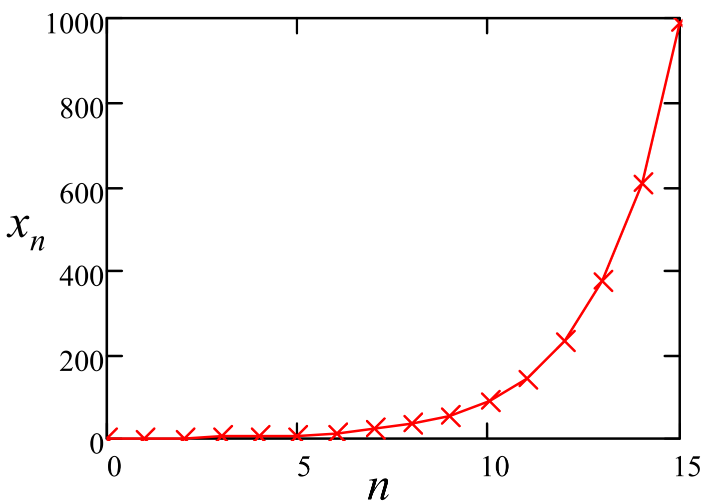


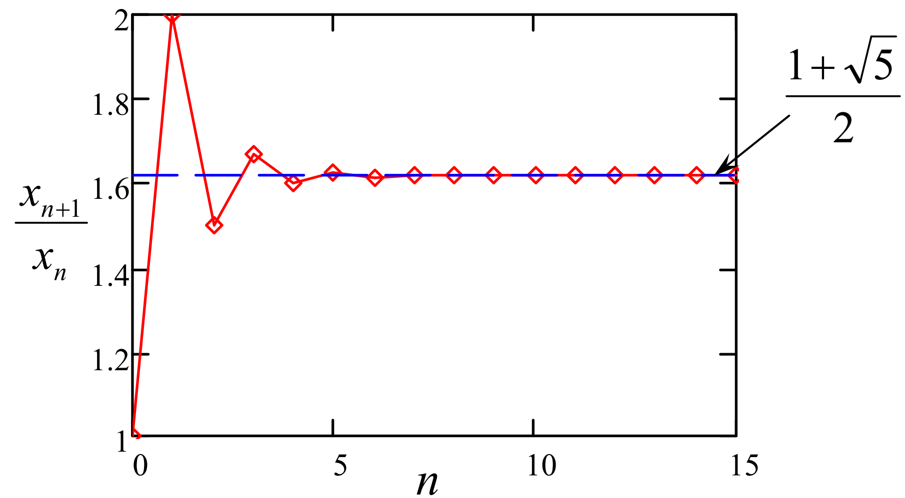
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

решение – линейная комбинация двух геометрических прогрессий

Золотое сечение



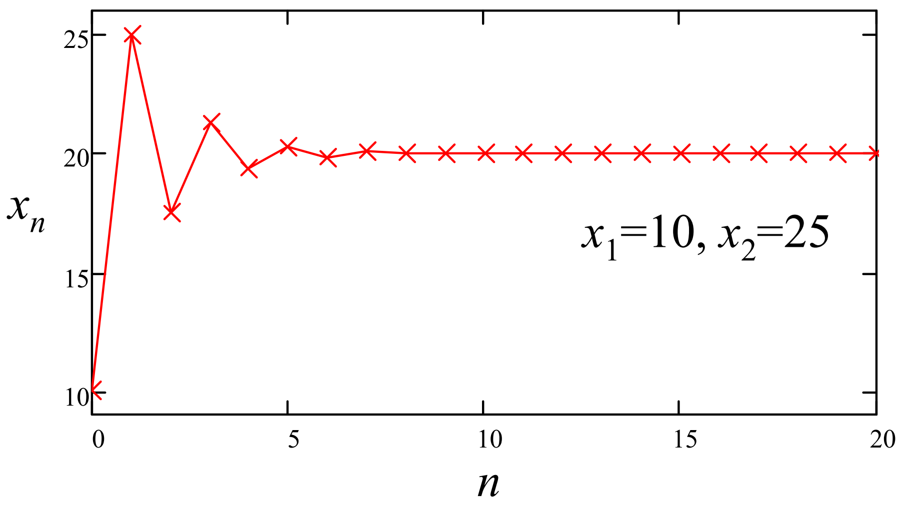


$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{при}\quad n\to\infty$$

2.1 «Изысканный ужин» или задача об омарах

$$x_{n+2}=x_n/2+x_{n+1}/2$$

Число пойманных омаров равняются среднему улову за два предыдущих года



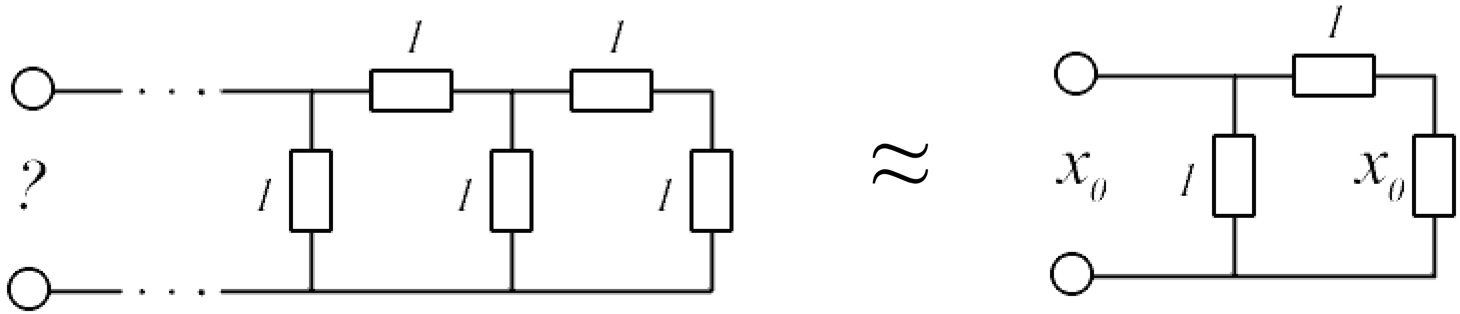
$$x_n \to 20 \text{ при } n \to \infty$$

$$x_n = \frac{x_1+2x_2}{3} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{x_1-x_2}{3}$$

$$x_n \to \frac{x_1+2x_2}{3} \text{ при } n \to \infty$$

3. Задача о бесконечной цепочке резисторов (сопротивлений)

Чему равно сопротивление цепочки резисторов, которая состоит из одинаковых звеньев?

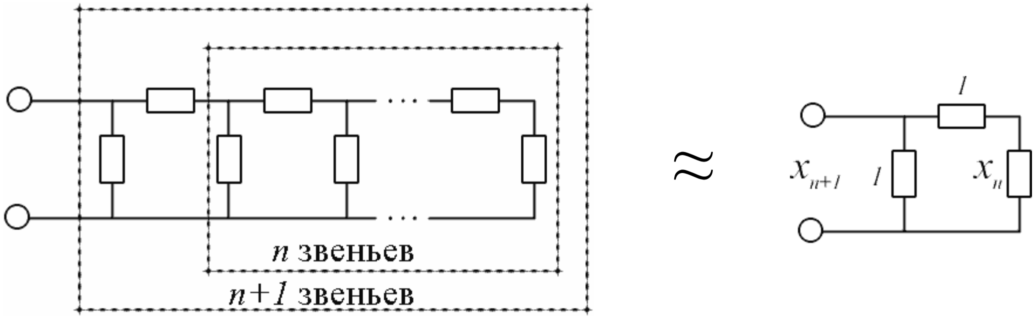


$$x_0 = \frac{(x_0 + 1) \cdot 1}{(x_0 + 1) + 1} = \frac{x_0 + 1}{x_0 + 2}$$

$$x_0^2 + x_0 - 1 = 0$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618034$$

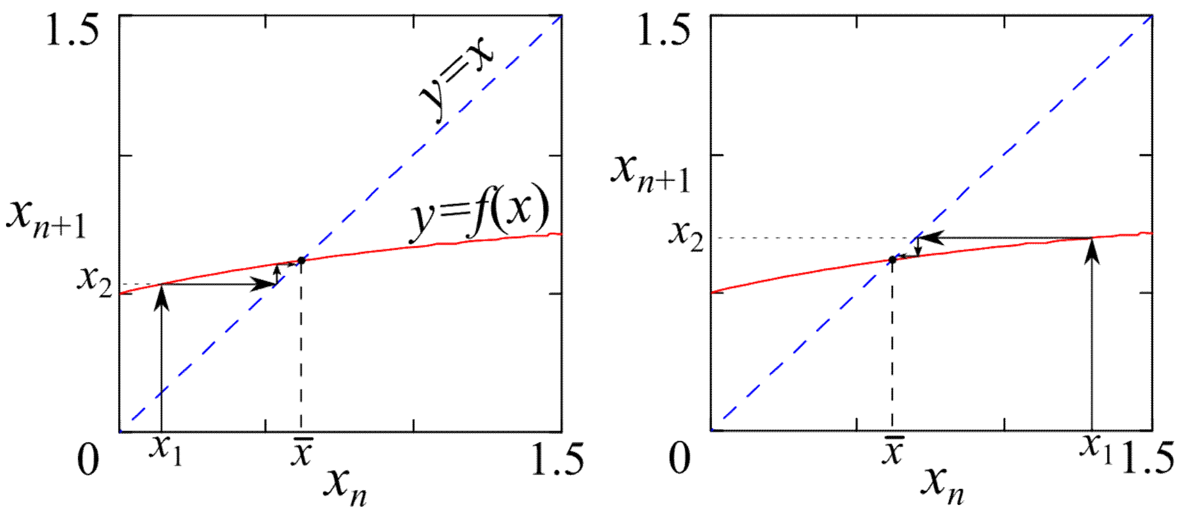
3. Задача о бесконечной цепочке резисторов (сопротивлений)



$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_n + 2} = f(x_n)$$

$$x_2 = f(x_1),$$
$$x_3 = f(x_2),$$
$$\ldots,$$
$$x_n = f(x_{n-1})$$

Итерационная диаграмма или лестница Ламерея



$x_n \to \bar{x}$ при $n \to \infty$

$$\bar{x} = f(\bar{x}) = \frac{\bar{x} + 1}{\bar{x} + 2}$$

$$\bar{x} = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2$$

неподвижная точка

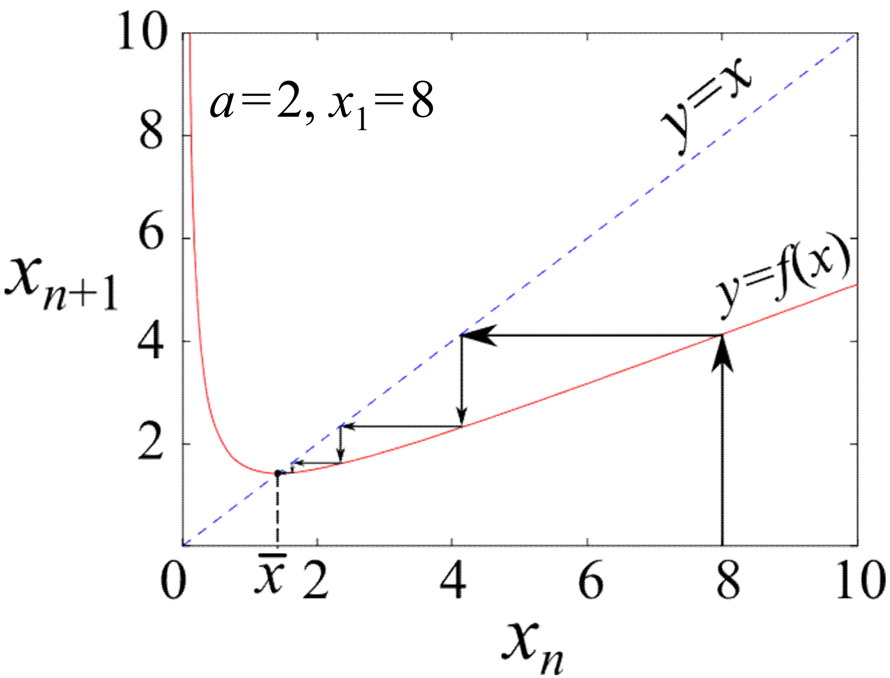
4. Вычисление математических констант

Итерационная формула Герона – метод приближенного значения $\sqrt{a}$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = f(x_n)$, где a – фиксированное положительное число,
x_1 – любое положительное число

$x_n \to \bar{x}$ при $n \to \infty$

$\bar{x} = f(\bar{x}) = \sqrt{a}$



x_1	8
x_2	4.125
x_3	2.304924242424242
x_4	1.5863158599138467
x_5	**1.4**235494082683804
x_6	**1.4142**44175296705
x_7	**1.4142135627**044208
x_8	**1.414213562373095**
x_9	**1.414213562373095**
x_{10}	**1.414213562373095**

$\sqrt{2} \approx 1.41421356\ 2373095048\ 80168872$

Заключение

- Приведено несколько задач, которые приводит к построению рекуррентных уравнений из разных областей науки
- Решением рекуррентных уравнений являются числовые последовательности
- Для демонстрации типов числовых последовательностей (возрастающая, убывающая, колебательная) предлагается строить графически эти последовательности
- Для исследования рекуррентных уравнений предлагается использовать итерационные диаграммы

Литература:

1. Нелинейный минимум / Студенту и школьнику / Сайт саратовской группы теоретической нелинейной динамики. URL: http://www.sgtnd.narod.ru/wts/rus/kruzhok.htm
2. Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкин Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов. 2010, 134 с. URL: http://www.sgtnd.narod.ru/wts/rus/KST.pdf
3. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. Москва. 2005, 464 с.