

---

---

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

---

---

УДК 517.938.5

DOI: 10.31433/978-5-904121-41-9-2024-155-157

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ ДВА В МОДЕЛИ РИКЕРА

Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова  
Институт прикладной математики ДВО РАН,  
Владивосток, ул. Радио 7, 690041,  
e-mail: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru

В модели Рикера с предельным циклом длины два и с постоянным коэффициентом роста получены новые результаты. Речь идет об установлении почти линейной зависимости отношения максимального значения предельного цикла к минимальному от коэффициента роста. Этот результат установлен численно.

**Ключевые слова:** модель Рикера, предельный цикл, отношение экстремальных значений, коэффициент роста.

## STUDY OF LIMIT CYCLES OF LENGTH TWO IN RICKER'S MODEL

G.Sh. Tsitsiashvili, M.A. Osipova

New results were obtained in the Ricker model with a limit cycle of length two and a constant growth coefficient. We are talking about establishing an almost linear dependence of the ratio of the maximum value of the limit cycle to the minimum on the growth coefficient. This result was established numerically.

**Keywords:** Ricker model, limit cycle, ratio of extreme values, growth coefficient.

Модель Рикера [1] нашла многочисленные приложения в популяционной динамике и вызвала интерес к своему анализу. В данной работе в модели с предельными циклами длины два получены новые результаты. Речь идет об исследовании отношения максимального значения предельного цикла длины два к минимальному. С помощью вычислительных экспериментов показано, что это отношение практически на всем отрезке значений коэффициента роста зависит монотонно и почти линейно от этого параметра. Эти результаты можно применить к анализу сдвига четности предельного цикла длины два.

Рассмотрим модель Рикера

$$y_{n+1} = f(y_n) = \alpha_n y_n \exp(-y_n), n \geq 0, \quad (1)$$

$\alpha_n$  – коэффициент роста. Остановимся на случае, когда  $\alpha_n \equiv \alpha$  и последовательность  $y_n, n \geq 0$ , имеет устойчивый предельный цикл длины 2, т.е.  $\beta_1 < \alpha < \beta_2, \beta_1 \approx 7,39, \beta_2 \approx 12,49$ .

Вычислим компоненты предельного цикла длины два  $Y, f(Y)$ , определяемых при  $Y > 0$  соотношениями  $Y = f(f(Y))$ :

$$Y = \alpha^2 Y \exp(-Y(1 + \alpha e^{-Y})) \Rightarrow \phi(Y) = 2 \ln \alpha = Y(1 + \alpha e^{-Y}) = \psi(Y).$$

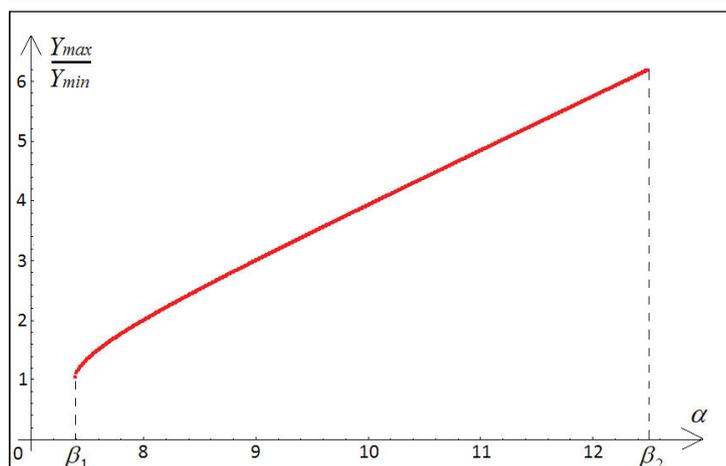
Численные расчеты корней уравнения (2) показывают, что при  $\beta_1 < \alpha < \beta_2$  уравнение имеет три корня  $Y_{max}, Y_{mid}, Y_{min} : Y_{max} < Y_{mid} = \ln \alpha < Y_{min}$ , так как у функции  $\psi(Y)$  есть минимум и максимум, причем  $Y_{max} = f(Y_{min}), Y_{min} = f(Y_{max})$ . Корень  $Y_{mid}$  соответствует неустойчивой точке покоя последовательности  $y_n, n \geq 0$ . Результаты вычисления корней уравнения (2) и  $Y_{max} / Y_{min}$  при некоторых значениях коэффициента роста представлены в табл., а на рис. построен график отношения  $Y_{max} / Y_{min}$  в зависимости от значения  $\alpha$  при  $\beta_1 < \alpha < \beta_2$ .

Из рис. видно, что отношение  $Y_{max} / Y_{min}$  с ростом коэффициента роста  $\alpha$  увеличивается от близкого к единице значения при  $\alpha = \beta_1$  до существенно большего единицы значения при  $\alpha = \beta_2$ . Таким образом, эмпирически получен факт, что на отрезке  $\beta_1 < \alpha < \beta_2$  отношение  $Y_{max} / Y_{min}$  зависит от коэффициента роста  $\alpha$  практически линейно.

Приведем пример сдвига четности устойчивого цикла в рассматриваемой модели при  $\alpha = 12,49$ . Пусть  $\alpha_n = \beta_2, 0 \leq n \leq 9, n \neq 4, \alpha_4 = \beta_2^* = e^{0,702882} \approx 2,01956$ , причем последовательность  $y_n, 0 \leq n \leq 9, n \neq 4$ , совпадает с устойчивым циклом длины два  $y_0 = y_2 = y_4 = y_5 = y_7 = y_9 = 0,702882, y_1 = y_3 = y_6 = y_8 = 4,34697$ . Од-

**Табл.** Значения корней  $Y_{min}, Y_{mid}, Y_{max}$  и отношения  $Y_{max} / Y_{min}$  в зависимости от коэффициента роста  $\alpha, \beta_1 < \alpha < \beta_2$ .

$\alpha$	$Y_{max} / Y_{min}$	$Y_{min}$	$Y_{mid}$	$Y_{max}$
7.39	1.02807	1.97244	2.00013	2.02781
8	2	1.38629	2.07944	2.77259
9	3	1.09861	2.19722	3.29584
10	3.92745	0.934596	2.30259	3.67057
11	4.83672	0.821659	2.3979	3.97413
12	5.74133	0.737215	2.48491	4.2326
12.15	5.87697	0.726287	2.49733	4.26837
12.3	6.01263	0.715737	2.5096	4.30346
12.45	6.14831	0.705543	2.52172	4.3379
12.49	6.1845	0.702882	2.52493	4.34697



**Рис.** График зависимости  $Y_{max} / Y_{min}$  от коэффициента роста  $\alpha$ ,  $\beta_1 < \alpha < \beta_2$ .

**Fig.** Graph of dependence  $Y_{max} / Y_{min}$  on growth coefficient  $\alpha$ ,  $\beta_1 < \alpha < \beta_2$ .

нако при  $n = 4$  происходит сдвиг четности устойчивого цикла, чтобы достичь его нужно в момент  $n = 4$  уменьшить коэффициент роста в  $\beta_2 / \beta_2^* \approx 6,18317$  раз.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рикер У. Е. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. Москва: Пищевая промышленность, 1979. 408 с.

REFERENCES:

1. Riker U. E. Metody ocenki i interpretacii biologicheskikh pokazatelej populyacij ryb. Moskva: Pishchevaya promyshlennost', 1979. 408 p.